数理解析研究所講究録
357巻 1979年 189-207

擬微分作用素の L^p-有界性

筑波大 数学　村松 寿延
大阪大 教養　長瀬 道弘

§1. 序論

滑らかな表象を持った擬微分作用素の L^p-又は L^2-有界性についてはよく知られているが、ここでは滑らかでない表象を持つ擬微分作用素の有界性について述べる。今までに得られている結果の中で、その典型的なものをいくつか述べてみよう。

1、表象 $p(x,\xi)$ が $|\alpha|\leqq[\frac{n}{2}]+1$, $|\beta|\leqq[\frac{n}{2}]+2$ に対して

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\rho(|\beta|-|\alpha|)}\qquad(0\leqq\rho<1)$$

をみたすならば、$p(X,D_x)$ は L^2-有界である (Cordes [1]、Kato [2])。

2、表象 $p(x,\xi)$ が $|\alpha|\leqq n+2$ に対して

$$|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)|\leqq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

$$|\partial_\xi^\alpha\{p(x,\xi)-p(y,\xi)\}|\leqq C_\alpha|x-y|^\sigma\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\sigma\delta}$$

$(0<\sigma\leqq1,\ 0\leqq\delta<1)$ をみたすならば、$1<r<+\infty$ に対して

$p(X, D_x)$ は L^r-有界である（Nagase [9], [10]）。

3、表象 $p(x,\xi)$ が

$$|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)| \leqq C_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \{p(x,\xi) - p(y,\xi)\}| \leqq C_\alpha \left\{\log \frac{2}{|x-y|}\right\}^{-\sigma} \langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

を $|\alpha| \leqq n+2$, $\sigma = 1$ でみたすならば $1 < r < +\infty$ に対して $p(X, D_x)$ は L^r-有界（Mossaheb, Okada [6]）、更に $|\alpha| \leqq n + [\frac{n}{2}] + 2$, $\sigma > 1/2$ でみたすならば L^r-有界（Coifman-Meyer [5]）である。

4、表象 $p(x,\xi,x')$ が $|\alpha| \leqq n+2$ に対して

$$|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi,x')| \leqq C_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \{p(x,\xi,x') - p(y,\xi,y')\}| \leqq C_\alpha \{|x-y|^\sigma + |x'-y'|^\sigma\} \langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\sigma\delta}$$

$(0 < \sigma \leqq 1,\ 0 \leqq \delta < 1)$ をみたせば $p(X, D_x, X')$ は $1 < r < +\infty$ に対して L^r-有界である（Kumano-go, Nagase [4], Muramatu [8]）。

ここでは、3 の結果をもう少し一般化した結果が表象 $p(x,\xi,x')$ を持つ擬微分作用素に対しても得られることを示す。 とくに [1], [2], [5], [6] で用いられている証明法は、表象 $p(x,\xi,x')$ を持つ作用素には適用できない。

本稿での有界性定理の証明は、[4], [9], [10] 等で用いられた表象に関する近似定理と、[7], [8] で用いられた作用素の parameter を持った、積分核表示とを用いて行われる。

§2、準備

この節では、本稿で用いる記号と主定理を示すために使われる簡単な補題を述べる。ここで用いる記号はいづれも通常よく使用されるものである。

$\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi\times\mathbb{R}^n_{x'}$ 上の有界連続関数 $p(x,\xi,x')$ に対し、$\|p\|_m$ を

$$\|p\|_m=\sup_{x,\xi,x',|\alpha|\leqq m}\{|p^{(\alpha)}(x,\xi,x')|\langle\xi\rangle^{|\alpha|}\}$$

と定義する。但し $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}=(1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2}$, $p^{(\alpha)}(x,\xi,x')=\partial_\xi^\alpha p(x,\xi,x')$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ である。更に $0<t\leqq 1$ に対し

$$\omega_{1,m}(p:t)=\sup_{x,\xi,x',|y|\leqq t,|\alpha|\leqq m}\{|p^{(\alpha)}(x,\xi,x')-2p^{(\alpha)}(x+y,\xi,x')+p^{(\alpha)}(x+2y,\xi,x')|\langle\xi\rangle^{|\alpha|}\}$$

$$\omega_{2,m}(p:t)=\sup_{x,\xi,x',|y'|\leqq t,|\alpha|\leqq m}\{|p^{(\alpha)}(x,\xi,x')-2p^{(\alpha)}(x,\xi,x'+y')+p^{(\alpha)}(x,\xi,x'+2y')|\langle\xi\rangle^{|\alpha|}\}$$

とおく。

表象 $p(x,\xi)$ を持つ擬微分作用素 $p(X,D_x)$ は、よく知られているように、$p(X,D_x)u(x)=\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,đ\xi$ で定義される。但し $u(x)$ は Schwartz の急減少関数空間 $\mathcal{S}$ の元で $\hat{u}(\xi)$ はそのフーリエ変換 $\hat{u}(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$ を表わす。更に $đ\xi=(2\pi)^{-n}d\xi$ とする。同様に表象 $p(x,\xi,x')$ を持つ擬微分作用素 $p(X,D_x,X')$ は形式的には、$p(X,D_x,X')u(x)=\iint e^{i(x-x')\cdot\xi}p(x,\xi,x')u(x')\,dx'\,đ\xi$ で定義される。積分は振動積分の意味で考えるものとする([3],[8])。次の補題

が成り立つ。

補題 2.1. 表象 $p(x,\xi,x')$ が、$\|p\|_{n+1}<+\infty$ かつ $\mathrm{supp}\, p(x,\xi,x')\subset\{(x,\xi,x') : |\xi|\leqq M\}$ $(M>0)$ をみたすとする。このとき、次の性質を持つ積分核 $K(x,x')$ が存在する。

1). $|K(x,x')|\leqq C\|p\|_{n+1}\langle x-x'\rangle^{-n-1}$

2). $p(X,D_x,X')u(x)=\int K(x,x')u(x')dx'$ $\quad u\in\mathcal{S}.$

この補題によって、ξ に関して compact support を持つ表象によって定義される擬微分作用素は $1\leqq p\leqq+\infty$ に対して L^p-有界であることがわかる。従って今後本稿では表象はすべて $\mathrm{supp}\, p(x,\xi,x')\subset\{(x,\xi,x') : |\xi|\geqq 2\}$ とする。

上の補題をもう少し一般化した次の補題が成り立つ。

補題 2.2. 表象 $p(x,\xi,x')$ が $|\alpha|\leqq n+1$ に対して

$$|p^{(\alpha)}(x,\xi,x')|\leqq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-\sigma-|\alpha|}\quad(\sigma>0)\tag{2.1}$$

をみたすならば、次の性質を持つ積分核 $K(x,x')$ が存在する。

1). $|K(x,x')|\leqq C\|p\|_{n+1}|x-x'|^{-n+\sigma'}(1+|x-x'|)^{-1}$
$(0<\sigma'<\min\{1,\sigma\})$.

2). $p(X,D_x,X')u(x)=\int K(x,x')u(x')dx'$ $\quad u\in\mathcal{S}.$

この補題によって、(2.1)をみたす表象を持つ擬微分作用素は $1\leqq r\leqq+\infty$ に対して L^r-有界であることがわかる。

上の二つの補題の証明は、作用素の定義式を用いて容易にできる([9], [10])。

§3. 近似定理

この節では、表象に関する近似定理を述べる。記号 $S^{\ell}_{1,0}$ はよく知られた Hörmander class の表象の集合とする。$\psi(\zeta)$ は $\int\psi(\zeta)d\zeta=1$, $\mathrm{supp}\,\psi\subset\{|\zeta|\leqq 1\}$ となるような偶関数の $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 関数とする。表象 $p(x,\xi,x')$ に対し

$$\tilde{p}(x,\xi,x')=\int\psi(\zeta)p(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta,x')d\zeta$$

$$=\int\psi(\langle\xi\rangle^{-\rho}(\xi-\zeta))\,p(x,\zeta,x')\langle\xi\rangle^{-\rho n}d\zeta \qquad (0<\rho<1)$$

$$\tilde{q}(x,\xi,x')=p(x,\xi,x')-\tilde{p}(x,\xi,x')$$

とおく。次の補題が成り立つ。

補題 3.1. 表象 $p(x,\xi,x')$ は $\|p\|_m<+\infty$, $\omega_{k,m}(p:t)<+\infty$ $(k=1,2)$ であるとする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$\omega_{k,m}(\tilde{p}:t)\leqq C_m\,\omega_{k,m}(p:t)\quad(k=1,2) \tag{3.1}$$

$$|\tilde{p}^{(\alpha)}(x,\xi,x')|\leqq C_\alpha\|p\|_m\begin{cases}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} & |\alpha|\leqq m-1\\ \langle\xi\rangle^{-m-(|\alpha|-m)\rho} & |\alpha|\geqq m\end{cases} \tag{3.2}$$

$$|\tilde{q}^{(\alpha)}(x,\xi,x')|\leqq C_\alpha\|p\|_m\langle\xi\rangle^{-(1-\rho)-|\alpha|}\qquad |\alpha|\leqq m-1 \tag{3.3}$$

証明. $|\alpha|\leqq m$ に対し

$$\partial_\xi^\alpha p(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta,x')=\sum_{\gamma\leqq\alpha,}\sum_{|\beta|\leqq|\alpha-\gamma|}\phi_{\gamma,\beta,\alpha}(\xi)\,\zeta^\beta\, p^{(\beta+\gamma)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta,x')$$

但し $\phi_{\gamma,\beta,\alpha}(\xi)\in S^{-|\alpha-\gamma|+|\beta|}_{1,0}$ と書ける。従って

$$\partial_\xi^\alpha\tilde{p}(x,\xi,x')=\int\psi(\zeta)\,\partial_\xi^\alpha p(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta,x')d\zeta$$

$$=\sum_{\gamma\leqq\alpha}\sum_{|\beta|\leqq|\alpha-\gamma|}\int\psi(\zeta)\zeta^\beta p^{(\beta+\gamma)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta,x')d\zeta\;\phi_{\gamma,\beta,\alpha}(\xi).$$

更に $|\zeta| \leqq 1$ のとき $c_0\langle\xi\rangle \leqq \langle\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta\rangle \leqq c_1\langle\xi\rangle$ であるから

$$|\partial_\xi^\alpha \tilde{p}(x,\xi,x')| \leqq C_1\|p\|_m \sum_{\gamma\leqq\alpha}\sum_{|\beta|\leqq|\alpha-\gamma|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha-\gamma|+|\beta|-|\beta+\gamma|}$$
$$\leqq C\|p\|_m\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

となり (3.2) の $|\alpha|\leqq m$ の場合が示された。 同様に上式と $\omega_{k,m}(p:t)$, $\omega_{k,m}(\tilde{p}:t)$ の定義より (3.1) が得られる。 また $\tilde{p}(x,\xi,x')$ の定義より $|\alpha|\leqq m-1$ に対し

$$\partial_\xi^\alpha \tilde{q}(x,\xi,x') = \sum_{j=1}^{n}\int_0^1\int\psi(\zeta)\zeta_j\,\partial_\xi^\alpha\{p^{(e_j)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}t\zeta,x')\langle\xi\rangle^{\rho}\}d\zeta dt$$

但し $e_j=(0,\cdots,0,\underset{j}{1},0,\cdots,0)$ と書けることから上と同様にして (3.3) 式が示せる。

$|\alpha|\geqq m$ のとき $\alpha=\alpha'+\alpha''$, $|\alpha'|=m$ と書くと

$$\partial_\xi^\alpha \tilde{p}(x,\xi,x') = \sum_{\gamma\leqq\alpha',}\sum_{|\beta|\leqq|\alpha'-\gamma|}\partial_\xi^{\alpha''}\{\phi_{\gamma,\beta,\alpha'}(\xi)\int\psi(\zeta)\zeta^\beta \cdot p^{(\beta+\gamma)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta,x')d\zeta\}$$
$$=\sum_{\gamma\leqq\alpha',}\sum_{|\beta|\leqq|\alpha'-\gamma|}\int\partial_\xi^{\alpha''}\{\phi_{\gamma,\beta,\alpha'}(\xi)\psi_\beta(\langle\xi\rangle^{-\rho}(\xi-\zeta))\langle\xi\rangle^{-\rho n}\} \cdot p^{(\beta+\gamma)}(x,\zeta,x')d\zeta$$

と書ける。 但し $\psi_\beta(\zeta)=\psi(\zeta)\zeta^\beta$ と書ける。 また

$$\partial_\xi^\delta\{\psi_\beta(\langle\xi\rangle^{-\rho}(\xi-\zeta))\} = \sum_{|\delta'+\delta''|\leqq|\delta|}\tilde{\phi}_{\delta,\delta',\delta''}(\xi)\{\langle\xi\rangle^{-\rho}(\xi-\zeta)\}^{\delta'} \cdot \psi_\beta^{(\delta'')}(\langle\xi\rangle^{-\rho}(\xi-\zeta))$$

但し $\psi_\beta^{(\delta'')}(\zeta)=\partial_\zeta^{\delta''}\psi_\beta(\zeta)$, $\tilde{\phi}_{\delta,\delta',\delta''}(\xi)\in S_{1,0}^{-\rho|\delta|}$ となることに注意すると

$$|\partial_\xi^\alpha \tilde{p}(x,\xi,x')| \leqq C\sum_{\gamma\leqq\alpha',}\sum_{|\beta|\leqq|\alpha'-\gamma|,}\sum_{|\delta'+\delta''|\leqq|\alpha''|}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha''|-|\alpha'-\gamma|+|\beta|}F_{\delta',\delta'',\gamma,\beta}$$

但し

$$F_{\delta',\delta'',\gamma,\beta}=\int|\psi_{\beta}^{(\delta'')}(\langle\xi\rangle^{-\rho}(\xi-\zeta))\{\langle\xi\rangle^{-\rho}(\xi-\zeta)\}^{\delta'}p^{(\beta+\gamma)}(x,\zeta,x')|\langle\xi\rangle^{-n\rho}d\zeta$$

$$=\int|\psi_{\beta}^{(\delta'')}(\zeta)\zeta^{\delta'}p^{(\beta+\gamma)}(x,\xi-\langle\xi\rangle^{\rho}\zeta,x')|d\zeta$$

$$\leqq C_1\|p\|_m\langle\xi\rangle^{-|\beta+\gamma|}$$

となり従って

$$|\partial_\xi^\alpha\tilde{p}(x,\xi,x')|\leqq C'\|p\|_m\langle\xi\rangle^{-m-\rho|\alpha''|}$$

すなわち (3.2) の $|\alpha|\geqq m$ の場合が示された。　　証明終

表象 $p(x,\xi,x')$ が $\|p\|_{n+2}<+\infty$ であるとすると上に定義した $\tilde{q}(x,\xi,x')$ は補題2.2の仮定を $\sigma=1-\rho\ (>0)$ としてみたす。従って $1\leqq r\leqq+\infty$ に対し $\tilde{q}(X,D_x,X')$ は L^r-有界であって

$$\|\tilde{q}(X,D_x,X')u\|_{L^r}\leqq C\|p\|_{n+2}\|u\|_{L^r}\qquad u\in\mathcal{S}$$

が成り立つ。　このことから $\|p\|_{n+2}<+\infty$ となる表象 $p(x,\xi,x')$ を持つ作用素の有界性を示すためには、$p(x,\xi,x')$ は $m=n+2$ として (3.2) をみたしかつ $\mathrm{supp}\,p(x,\xi,x')\subset\{|\xi|\geqq2\}$ であると仮定してよい。

次に表象 $p(x,\xi,x')$ に対し

$$\tilde{p}(x,\xi,x')=\int\psi(y)p(x-\langle\xi\rangle^{-\delta}y,\xi,x')dy$$

$$\tilde{\tilde{p}}(x,\xi,x')=\int\psi(y')p(x,\xi,x'-\langle\xi\rangle^{-\delta}y')dy'$$

$$\tilde{q}(x,\xi,x')=p(x,\xi,x')-\tilde{p}(x,\xi,x')$$

$$\tilde{\tilde{q}}(x,\xi,x')=p(x,\xi,x')-\tilde{\tilde{p}}(x,\xi,x')$$

$(0<\delta<\rho<1)$ と定義する。

補題 3.2. 表象 $p(x,\xi,x')$ は $\|p\|_m<+\infty$, $w_{k,m}(p:t)<+\infty$ ($k=1,2$) とする。 このとき次の不等式が成り立つ。

(i) $w_{2,m}(\tilde{p}:t)\leqq C_m w_{2,m}(p:t)$ (3.4)

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{p}(x,\xi,x')|\leqq C_{\alpha,\beta}\|p\|_m\begin{cases}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-|\alpha|} & (|\alpha|\leqq m)\\ \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-m-\rho(|\alpha|-m)} & (|\alpha|\geqq m)\end{cases} \tag{3.5}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \tilde{q}(x,\xi,x')|\leqq C_\alpha w_{1,m}(p:\langle\xi\rangle^{-\delta})\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \quad (|\alpha|\leqq m) \tag{3.6}$$

(ii) $w_{1,m}(\tilde{\tilde{p}}:t)\leqq C_m w_{1,m}(p:t)$ (3.7)

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_{x'}^\beta \tilde{\tilde{p}}(x,\xi,x')|\leqq C_{\alpha,\beta}\|p\|_m\begin{cases}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-|\alpha|} & (|\alpha|\leqq m)\\ \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-m-\rho(|\alpha|-m)} & (|\alpha|\geqq m)\end{cases} \tag{3.8}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \tilde{\tilde{q}}(x,\xi,x')|\leqq C_\alpha w_{2,m}(p:\langle\xi\rangle^{-\delta})\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \quad (|\alpha|\leqq m) \tag{3.9}$$

証明. $\int\psi(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\langle\xi\rangle^{n\delta}dy=1$ だから

$$\tilde{q}(x,\xi,x')=\int\psi(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\langle\xi\rangle^{n\delta}\{p(x,\xi,x')-p(y,\xi,x')\}dy.$$

ところで

$$\begin{aligned}&\partial_\xi^\alpha\{\psi(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\langle\xi\rangle^{n\delta}\{p(x,\xi,x')-p(y,\xi,x')\}\}\\ &=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial_\xi^{\alpha-\beta-\gamma}\{\langle\xi\rangle^{n\delta}\}\,\partial_\xi^\beta\{\psi(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\}\{p^{(\gamma)}(x,\xi,x')\\ &\qquad -p^{(\gamma)}(y,\xi,x')\}\\ &=\sum_{\beta+\gamma=\alpha,}\sum_{|\beta'|\leqq|\beta|}b_{\alpha,\beta,\gamma,\beta'}(\xi)\{\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y)\}^{\beta'}\psi^{(\beta')}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\\ &\qquad\cdot\langle\xi\rangle^{n\delta}\{p^{(\gamma)}(x,\xi,x')-p^{(\gamma)}(y,\xi,x')\}\end{aligned}$$

但し $\psi^{(\beta')}(y)=\partial_y^{\beta'}\psi(y)$, $b_{\alpha,\beta,\gamma,\beta'}(\xi)\in S_{1,0}^{-|\alpha-\gamma|}$ と書ける。

$\psi^{(\beta')}y^{\beta'}$ は偶関数であるから

$$\int\{\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y)\}^{\beta'}\psi^{(\beta')}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\langle\xi\rangle^{n\delta}\{p^{(\gamma)}(x,\xi,x')-p^{(\gamma)}(y,\xi,x')\}dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int \psi^{(\beta')}(y)\, y^{\beta'}\{p^{(\gamma)}(x-\langle\xi\rangle^{-\delta}y,\xi,x') - 2p^{(\gamma)}(x,\xi,x') + p^{(\gamma)}(x+\langle\xi\rangle^{-\delta}y,\xi,x')\}\,dy.$$

従って

$$|\partial_\xi^\alpha \tilde{q}(x,\xi,x')| \leqq C_\alpha \sum_{|\gamma|\leqq|\alpha|}\int |\psi^{(\gamma)}(y)\, y^{\gamma}| \cdot \omega_{1,|\alpha|}(p:\langle\xi\rangle^{-\delta})\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}dy$$

$$\leqq C'_\alpha\, \omega_{1,m}(p:\langle\xi\rangle^{-\delta})\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

が成り立つ。　更に

$$\partial_x^\beta \tilde{p}(x,\xi,x') = \int \psi^{(\beta)}(\langle\xi\rangle^{\delta}(x-y))\, p(y,\xi,x')\langle\xi\rangle^{\delta(n+|\beta|)}dy$$

であることから上と同様にして

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \tilde{p}(x,\xi,x')| \leqq C_{\alpha,\beta}\|p\|_m \begin{cases} \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-|\alpha|} & |\alpha|\leqq m \\ \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-m-\rho(|\alpha|-m)} & |\alpha|\geqq m \end{cases}$$

を得る。

また $\omega_{2,m}(\tilde{p}:t) \leqq C_m\, \omega_{2,m}(p:t)$ も $\omega_{2,m}(\tilde{p}:t)$ の定義式を用いて同様に示せる。

(ii)の証明は(i)の証明と全く同様である。　証明終

注意. 補題3.1と3.2における m はいづれも任意の自然数でよいが、擬微分作用素の有界性を示すために、本稿においては $m = n+2$ として用いる。

§4、有界性定理

この節では、主定理の証明に必要となる、擬微分作用素の有界性定理を述べる。本稿における主定理は次節で述べる。

$f_j(t)$ $(j=1,2)$ は $\int_0^1 f_j(t)^j \frac{dt}{t}=1$, $\mathrm{supp}\, f_j \subset [\frac{1}{2},1]$ となるような $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ 関数とする。

$$F_{j,\varepsilon}(\xi)=\int_\varepsilon^1 f_j(t|\xi|)^j \frac{dt}{t}$$

と定義する。このとき明らかに $F_{j,\varepsilon}(\xi)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 関数で $\mathrm{supp}\, F_{j,\varepsilon} \subset \{|\xi| \leqq 1/\varepsilon\}$ かつ $|\xi| \geqq 1$ に対して $\lim_{\varepsilon\to 0} F_{j,\varepsilon}(\xi)=1$ となる。従って作用素 $p(X,D_x,X')$ の定義より

$$\begin{aligned} p(X,D_x,X')u(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{i(x-x')\cdot\xi} F_{j,\varepsilon}(\xi)p(x,\xi,x')u(x')dx'd\!\!\!{}^-\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t}\iint e^{i(x-x')\cdot\xi} f_j(t|\xi|)^j p(x,\xi,x')u(x')dx'd\!\!\!{}^-\xi \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{t}\iint e^{i(x-x')\cdot\xi} f_j(t|\xi|)^j p(x,\xi,x')u(x')dx'd\!\!\!{}^-\xi. \end{aligned}$$

但しここで $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ とは $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t}$ の意味である。

$$K_j(t;x,z,x')=\int e^{iz\cdot\xi} p(x,\frac{\xi}{t},x') f_j(t|\xi|)d\!\!\!{}^-\xi \qquad (j=1,2)$$

とおく。このとき上式より

$$p(X,D_x,X')u(x)=\int_0^1 \frac{dt}{t}\int t^{-n} K_1(t;x,\frac{x-x'}{t},x')u(x')dx' \tag{4.1}$$

又は、

$$p(X,D_x,X')u(x)=\int_0^1 \frac{dt}{t}\iiint e^{i(x-x'-tz)\cdot\xi} K_2(t;x,z,x') \cdot f_2(t|\xi|)u(x')dz\,dx'd\!\!\!{}^-\xi \tag{4.2}$$

と書ける。(4.2) 式は $p(x,\frac{\xi}{t},x')f_2(t|\xi|)=\int e^{-iz\cdot\xi}K_2(t;x,z,x')dz$ であることを用いて示せる。

補題4.1. $h(t)$ は $(0,1]$ で定義された非負値非減少関数とする。表象 $p(x,\xi,x')$ がある正数 δ に対して

$$\sup_{x,\xi,x',|\alpha|\leqq m}\{|p^{(\alpha)}(x,\xi,x')|\langle\xi\rangle^{|\alpha|}h(\langle\xi\rangle^{-\delta})^{-1}\}=M<+\infty \tag{4.3}$$

をみたすならば $0<t\leqq 1/2$ に対して

$$|K_j(t;x,z,x')|\leqq CM\,h(2^\delta t^\delta)\langle z\rangle^{-m} \tag{4.4}$$

をみたす $p(x,\xi,x')$ に無関係な正定数 C が存在する。

証明. $|\alpha|\leqq m$ に対して

$$z^\alpha K_j(t;x,z,x')=\int e^{iz\cdot\xi}\,i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha\{p(x,\tfrac{\xi}{t},x')f_j(|\xi|)\}d\xi$$

かつ

$$|\partial_\xi^\alpha\{p(x,\tfrac{\xi}{t},x')f_j(|\xi|)\}|\leqq\sum_{\beta\leqq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial_\xi^\beta\{p(x,\tfrac{\xi}{t},x')\}\cdot\partial_\xi^{\alpha-\beta}\{f_j(|\xi|)\}|$$

$$\leqq\sum_{\beta\leqq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}M\,t^{|\beta|}\langle\tfrac{\xi}{t}\rangle^{-|\beta|}|\partial_\xi^{\alpha-\beta}\{f_j(|\xi|)\}|\,h(\langle\tfrac{\xi}{t}\rangle^{-\delta})$$

が成り立つ。ところで $\mathrm{supp}\,f_j(|\xi|)\subset\{1/2\leqq|\xi|\leqq 1\}$ だから $\langle\frac{\xi}{t}\rangle^{-1}\leqq\frac{t}{|\xi|}\leqq 2t$ である。よって

$$|z^\alpha K_j(t;x,z,x')|\leqq C'_\alpha M\,h(2^\delta t^\delta)\int_{\frac12\leqq|\xi|\leqq 1}d\xi$$

となり (4.4) 式を得る。　　証明終

注意1. $\mathrm{supp}\,p(x,\xi,x')\subset\{|\xi|\geqq 2\}$ であることに注意すると $\frac12\leqq t\leqq 1$ のとき $p(x,\frac{\xi}{t},x')f_j(|\xi|)=0$ となり従って $\frac12\leqq t\leqq 1$ のとき $K_j(t;x,z,x')=0$ $(j=1,2)$ である。

注意2. $\|p\|_m<+\infty$ のとき $h(t)\equiv 1$ として (4.3) が成り立つ。従って $m\geqq n+1$ のとき (4.1), (4.2) の被積分関数はそれぞれ x', (x',z,ξ) について絶対可積である。

定理4.2. $h(t)$ は $(0,1]$ で定義された非負非減少関数で $\int_0^1 h(t)\frac{dt}{t}<+\infty$ であるとする。表象 $p(x,\xi,x')$ がある正数 δ に対して $m=n+1$ として (4.3)をみたすならば $1\leqq r\leqq+\infty$ に対して $p(X,D_x,X')$ は L^r-有界で

$$\|p(X,D_x,X')u\|_{L^r}\leqq CM\left\{\frac{1}{\delta}\int_0^1 h(t)\frac{dt}{t}\right\}\|u\|_{L^r}\quad u\in\mathcal{S}\qquad(4.5)$$

が成り立つ。

証明. 補題4.1によって $0<t\leqq\frac{1}{2}$ に対して

$$|K_1(t;x,z,x')|\leqq CM\langle z\rangle^{-n-1}h(2^\delta t^\delta)$$

が成り立つ。従って $0<t\leqq 1/2$ に対して

$$t^{-n}\int\left|K_1\left(t;x,\frac{x-x'}{t},x'\right)\right|dx\leqq C_1Mh(2^\delta t^\delta)$$

$$t^{-n}\int\left|K_1\left(t;x,\frac{x-x'}{t},x'\right)\right|dx'\leqq C_1Mh(2^\delta t^\delta)$$

が成り立つ。故によく知られた方法により

$$\|p(X,D_x,X')u\|_{L^r}\leqq C_1M\int_0^1 h(2^\delta t^\delta)\frac{dt}{t}\|u\|_{L^r}\quad u\in\mathcal{S}$$

となり (4.5) を得る。 証明終

定理4.3. $h(t)$ は $(0,1]$ で定義された非負非減少関数で $\int_0^1 h(t)^2\frac{dt}{t}<+\infty$ であるとする。表象 $p(x,\xi)$ がある正数 δ に対して

$$\sup_{x,\xi,|\alpha|\leqq n+2}\left\{|p^{(\alpha)}(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{|\alpha|}h(\langle\xi\rangle^{-\delta})^{-1}\right\}=M<+\infty$$

をみたすとする。このとき $p(X,D_x)$ は L^2-有界であって

$$\|p(X,D_x)u\|_{L^2}\leqq CM\left\{\frac{1}{\delta}\int_0^1 h(t)^2\frac{dt}{t}\right\}^{1/2}\|u\|_{L^2}\quad u\in\mathcal{S}\qquad(4.6)$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　等式(4.2)を用いる。$p(x,\xi)$がx'に無関係だから

$$p(X,D_x)u(x)=\int_0^1\frac{dt}{t}\iiint e^{i(x-x'-tz)\cdot\xi}K_2(t;x,z)f_2(t|\xi|)u(x')\,dz\,dx'\,d\xi$$

但し　$K_2(t;x,z)=\int e^{iz\cdot\xi}p(x,\frac{\xi}{t})f_2(|\xi|)\,d\xi$　と書ける。

従って

$$p(X,D_x)u(x)=\int_0^1\frac{dt}{t}\iint e^{i(x-tz)\cdot\xi}K_2(t;x,z)f_2(t|\xi|)\hat{u}(\xi)\,dz\,d\xi$$

である。　$G(t;x,z)=\int e^{i(x-tz)\cdot\xi}f_2(t|\xi|)\hat{u}(\xi)\,d\xi$　とおくと

$$p(X,D_x)u(x)=\int_0^1\frac{dt}{t}\int K_2(t;x,z)G(t;x,z)\,dz$$

であるから

$$|p(X,D_x)u(x)|^2\leqq\int_0^{1/2}\frac{dt}{t}\int|K_2(t:x,z)|^2\langle z\rangle^{n+1}dz\cdot\int_0^{1/2}\frac{dt}{t}\int|G(t;x,z)|^2\langle z\rangle^{-n-1}dz$$

更に$G(t;x,z)$の定義式とParsevalの等式より

$$\int|G(t;x,z)|^2dx=\int f_2(t|\xi|)^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$$

かつ補題4.1より

$$\int_0^{1/2}\frac{dt}{t}\int|K_2(t;x,z)|^2\langle z\rangle^{n+1}dz\leqq C_1^2M^2\int_0^{1/2}\frac{dt}{t}\int\langle z\rangle^{-n-1}h(z^\delta t^\delta)\,dz$$
$$\leqq C_2^2M^2\frac{1}{\delta}\int_0^1 h(t)^2\frac{dt}{t}$$

が成り立つ。　よって

$$\|p(X,D_x)u\|_{L^2}^2\leqq C_3^2M^2\left\{\frac{1}{\delta}\int_0^1 h(t)^2\frac{dt}{t}\right\}\int_0^1\frac{dt}{t}\int f_2(t|\xi|)^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$$
$$=C^2M^2\left\{1/\delta\int_0^1 h(t)^2\frac{dt}{t}\right\}\|u\|_{L^2}^2$$

となり定理を得る。　　　<u>証明終</u>

定理4.4．　$h(t)$ は $(0,1]$ で定義された非負非減少関数で $\int_0^1 h(t)^2 \frac{dt}{t} < +\infty$ であるとする。　表象 $p(\xi, x')$ がある正数 δ に対して

$$\sup_{\xi, x', |\alpha| \leq n+1} \{|p^{(\alpha)}(\xi, x')| \langle\xi\rangle^{|\alpha|} h(\langle\xi\rangle^{-|\alpha|-\delta})^{-1}\} = M < +\infty$$

をみたすとする。　このとき $p(D_x, x')$ は L^2－有界で

$$\|p(D_x, x')u\|_{L^2} \leq CM\left\{\frac{1}{\delta}\int_0^1 h(t)^2 \frac{dt}{t}\right\}^{1/2} \|u\|_{L^2} \quad u \in \mathcal{S} \qquad (4.7)$$

が成り立つ。

証明．　前定理の証明と同様に(4.2)を用いて

$$p(D_x, x')u(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \iiint e^{i(x-x'-tz)\cdot\xi} K_2(t; z, x') f_2(t|\xi|) u(x')\, dz\, dx'\, d\xi$$

但し　$K_2(t; z, x') = \int e^{iz\cdot\xi} p\left(\frac{\xi}{t}, x'\right) f_2(|\xi|)\, d\xi$　と書ける。

$v(x) = p(D_x, x')u(x)$　とおくと　$G(t; z, \xi) = \int e^{-ix'\cdot\xi} K_2(t, z, x')$ $u(x')\, dx'$　とおいて　$\hat{v}(\xi) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int e^{-itz\cdot\xi} f_2(t|\xi|) G(t; z, \xi)\, dz$ と書ける。　従って

$$|\hat{v}(\xi)|^2 \leq \left\{\int_0^1 \frac{dt}{t} \int f_2(t|\xi|)^2 \langle z\rangle^{-n-1} dz\right\} \cdot \left\{\int_0^{1/2} \frac{dt}{t} \int |G(t; z, \xi)|^2 \langle z\rangle^{n+1} dz\right\}$$

となる。　故に

$$\|p(D_x, x')u\|_{L^2}^2 = \|v\|_{L^2}^2 \leq C_1^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \iint |G(t; z, \xi)|^2 \langle z\rangle^{n+1} dz\, d\xi$$

$$= C_1^2 \int_0^{1/2} \frac{dt}{t} \iint |K_2(t; z, x')u(x')|^2 dx' \langle z\rangle^{n+1} dz$$

$$\leq C_2^2 M \left\{\frac{1}{\delta}\int_0^1 h(t)^2 \frac{dt}{t}\right\} \|u\|_{L^2}^2$$

となり定理が示された。　　　　証明終

§5. 主定理

次の定理が主定理である。

定理5.1. 表象 $p(x,\xi,x')$ は $\|p\|_{n+2}<+\infty$ であるとする。

(i) $\int_0^1 \omega_{1,n+2}(p:t)^2\frac{dt}{t}=M_1^2<+\infty$ かつ $\int_0^1 \omega_{2,n+2}(p:t)\frac{dt}{t}=M_2<+\infty$

であるならば $p(X,D_x,X')$ は L^2-有界で

$$\|p(X,D_x,X')u\|_{L^2}\leqq C(M_1+M_2+\|p\|_{n+2})\|u\|_{L^2}\quad u\in\mathcal{S}\qquad(5.1)$$

が成り立つ。

(ii) $\int_0^1 \omega_{1,n+2}(p:t)\frac{dt}{t}=M_1<+\infty$ かつ $\int_0^1 \omega_{2,n+2}(p:t)^2\frac{dt}{t}=M_2^2<+\infty$

であるならば $p(X,D_x,X')$ は L^2-有界で (5.1) が成り立つ。

(iii) $\int_0^1 \omega_{1,n+2}(p:t)\frac{dt}{t}=M_1<+\infty$ かつ $\int_0^1 \omega_{2,n+2}(p:t)\frac{dt}{t}=M_2<+\infty$

であるならば $p(X,D_x,X')$ は $1<r<+\infty$ に対し L^r-有界で

$$\|p(X,D_x,X')u\|_{L^r}\leqq C_r(M_1+M_2+\|p\|_{n+2})\|u\|_{L^r}\quad u\in\mathcal{S}\qquad(5.2)$$

が成り立つ。

証明. 第3節で述べたように $p(x,\xi,x')$ は $\operatorname{supp}p(x,\xi,x')\subset\{|\xi|\geqq 2\}$ であって

$$|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi,x')|\leqq C_\alpha\begin{cases}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} & |\alpha|\leqq n+2\\ \langle\xi\rangle^{-n-2-\rho(|\alpha|-n-2)} & |\alpha|\geqq n+2\end{cases}$$

$(0<\rho<1)$ をみたすと仮定してよい。 このとき $\tilde{p}(x,\xi,x')$, $\tilde{q}(x,\xi,x')$ を第3節と同様に

$$\tilde{p}(x,\xi,x')=\int\psi(y')p(x,\xi,x'-\langle\xi\rangle^{-\delta}y')dy'\qquad(0<\delta<\rho<1)$$

$$\tilde{q}(x,\xi,x')=p(x,\xi,x')-\tilde{p}(x,\xi,x')$$

とおく。このときもし $p(x,\xi,x')$ が定理の (i) 又は (iii) の仮定をみたすとすると、補題3.2 (ii) より $\tilde{\tilde{q}}(x,\xi,x')$ は $k(t)=\omega_{2,m+2}(p:t)$ として定理4.2 の仮定をみたす。故に $\tilde{\tilde{q}}(X,D_x,X')$ は $1\leqq r\leqq+\infty$ に対して L^r-有界であって

$$\|\tilde{\tilde{q}}(X,D_x,X')u\|_{L^r}\leqq C\int_0^1\omega_{2,m+2}(p:t)\frac{dt}{t}\|u\|_{L^r}\qquad u\in\mathcal{S}\tag{5.3}$$

をみたす。更に $\tilde{\tilde{p}}(x,\xi,x')$ は $\omega_{1,m+2}(\tilde{\tilde{p}}:t)\underset{C}{\leqq}\omega_{1,m+2}(p:t)$ かつ

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_{x'}^\beta\tilde{\tilde{p}}(x,\xi,x')|\leqq C_{\alpha,\beta}\|p\|_{m+2}\begin{cases}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-|\alpha|} & |\alpha|\leqq m+2\\ \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-m-2-\rho(|\alpha|-m-2)} & |\alpha|\geqq m+2\end{cases}$$

をみたす。この式よりよく知られた公式によって $\tilde{\tilde{p}}(X,D_x,X')$ は $\tilde{\tilde{p}}(X,D_x,X')u(x)=p_0(X,D_x)u(x)+p_1(X,D_x)u(x)\quad u\in\mathcal{S}$.

但し $p_0(x,\xi)=\tilde{\tilde{p}}(x,\xi,x)$ で $p_1(x,\xi)$ は

$$|\partial_\xi^\alpha p_1(x,\xi)|\leqq C_\alpha\|p\|_{m+2}\langle\xi\rangle^{-(1-\delta)-|\alpha|}\qquad |\alpha|\leqq m+1$$

をみたす。従って補題2.2 より $p_1(X,D_x)$ は $1\leqq r\leqq+\infty$ に対して L^r-有界で

$$\|p_1(X,D_x)u\|_{L^r}\leqq C\|p\|_{m+2}\|u\|_{L^r}\qquad u\in\mathcal{S}\tag{5.4}$$

をみたす。次に $p_0(x,\xi)$ に対し $r(x,\xi)$, $q(x,\xi)$ を

$$r(x,\xi)=\int\psi(y)\tilde{\tilde{p}}(x-\langle\xi\rangle^{-\delta}y,\xi,x)\,dy$$

$$q(x,\xi)=p(x,\xi)-r(x,\xi)$$

と定義する。このとき補題3.1 (i) と同様にして

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta r(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\|p\|_{m+2}\begin{cases}\langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-|\alpha|} & |\alpha|\leqq m+2\\ \langle\xi\rangle^{\delta|\beta|-m-2-\rho(|\alpha|-m-2)} & |\alpha|\geqq m+2\end{cases}$$

$$|\partial_\xi^\alpha q(x,\xi)| \leqq C_\alpha\, \omega_{1,m+2}(p:\langle\xi\rangle^{-\delta})\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \qquad |\alpha| \leqq m+1$$

と書ける。 従って $r(X, D_x)$ はよく知られた定理により $1 < r < +\infty$ に対して L^r- 有界で

$$\|r(X, D_x)u\|_{L^r} \leqq C_r \|p\|_{m+2} \|u\|_{L^r} \qquad u \in \mathcal{S} \tag{5.5}$$

となる。 また定理の (iii) の仮定がみたされるときは上と同様に定理4.2によって $1 \leqq r \leqq +\infty$ に対して $q(X, D_x)$ は L^r- 有界であって

$$\|q(X, D_x)u\|_{L^r} \leqq C\int_0^1 \omega_{1,m+2}(p:t)\frac{dt}{t}\|u\|_{L^r} \qquad u \in \mathcal{S} \tag{5.6}$$

となる。 従って (5.3)(5.4)(5.5)(5.6) から定理の (iii) が成り立つことが示される。 また定理の (i) の仮定がみたされるときは $q(x,\xi)$ は定理4.3の仮定をみたすから L^2- 有界であって

$$\|q(X, D_x)u\|_{L^2} \leqq C\left\{\int_0^1 \omega_{1,m+2}(p:t)^2\frac{dt}{t}\right\}^{1/2}\|u\|_{L^2} \qquad u \in \mathcal{S} \tag{5.7}$$

となる。 従って (5.3)(5.4)(5.5)(5.7) から定理の (i) が成り立つことがわかる。

定理の (ii) はまず x 変数について近似定理を用いることによって上と類似の方法で証明できる。 証明終

注意 定理の (i) 又は (iii) の仮定の下で $p(X, D_x, X')$ が $1 < r < +\infty$ に対して L^r- 有界となるかどうかは一つの問題である。 例えば (i) の仮定の下で L^r- 有界となるためには、証明で用いた $p_0(X, D_x)$ 又は $q(X, D_x)$ が L^r- 有界となればよい。 (i) の仮定の下で $p_0(X, D_x)$ が weak type (1, 1) の作用素であることが示

せる。 従ってよく知られた補間定理により $p_0(X, D_x)$ は $1 < r \leqq 2$ に対して L^r-有界、従って $p(X, D_x, X')$ は $1 < r \leqq 2$ に対して L^r-有界である。 更にこの共役な関係として (iii) の仮定の下で $2 \leqq r < +\infty$ に対し $p(X, D_x, X')$ は L^r-有界となる。

定理の系として次のような有界性定理を得る。

系 5.2. 表象 $p(x, \xi)$ が $\|p\|_{n+2} < +\infty$ かつ $|\alpha| \leqq n+2$ に対し

$$|p^{(\alpha)}(x, \xi) - p^{(\alpha)}(y, \xi)| \leqq C_\alpha \left(\log\frac{2}{|x-y|}\right)^{-\sigma} \langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \qquad (\sigma > 1/2)$$

をみたすならば $p(X, D_x)$ は L^2-有界である。

系 5.3. 表象 $p(x, \xi, x')$ が $\|p\|_{n+2} < +\infty$ かつ

$$\omega_{1,n+2}(p : t) \leqq C\left\{\log\frac{2}{t}\right\}^{-1/2}\left\{\log\left\{\frac{2}{\log 2}\log\frac{2}{t}\right\}\right\}^{-\sigma}$$

$$\omega_{2,n+2}(p : t) \leqq C\left\{\log\frac{2}{t}\right\}^{-1}\left\{\log\left\{\frac{2}{\log 2}\log\frac{2}{t}\right\}\right\}^{-2\sigma}$$

$(\sigma > 1/2)$ をみたすならば $p(X, D_x, X')$ は L^2-有界である。

参考文献

[1] H. O. Cordes, On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudo-differential operators, J. Functional Analysis, 18 (1975), 115 – 131.

[2] T. Kato, Boundedness of some pseudo-differential operators, Osaka J. Math., 13 (1976), 1 – 9.

[3] H. Kumano-go, Pseudo-differential operators, Iwanami Shoten, Tokyo, 1974 (in Japanese).

[4] H. Kumano-go and M. Nagase, Pseudo-differential operators with non-regular symbols and applications, Funkcialaj Ekvacioj, 21 (1978), 151–192.

[5] Y. Meyer et R. Coifman, Operateurs pseudo-differentiels et theoreme de Calderón, Cours de 3 ème cycle (1976–1977) et exposé au séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay 1976.

[6] S. Mossaheb et M. Okada, Une classe d'operateurs pseudo-differentiels bornes sur $L^r(R^n)$, $1 < r < \infty$, Cours de 3 ème cycle (1976–1977) et exposé au séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay 1976.

[7] T. Muramatu, On the boundedness of a class of operator-valued pseudo-differential operators in L^p-space, Proc. Japan Acad., 49 (1973).

[8] T. Muramatu, Functional analysis and partial differential equations (edited by K. Yosida and S. Itoh) Part II, Chap. 2, Iwanami Shoten, Tokyo, 1976 (in Japanese).

[9] M. Nagase, The L^p-boundedness of pseudo-differential operators with non-regular symbols, Comm. in P. D. E., 2(10) (1977), 1045 – 1061.

[10] M. Nagase, 擬微分作用素における近似定理と L^p-有界性, 数理解析研 講究録 337.